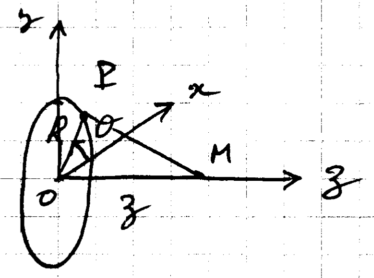
L2-MPI | Corrigé du partiel Electromagnétisme du 12 Nov 2012

Ex1 :



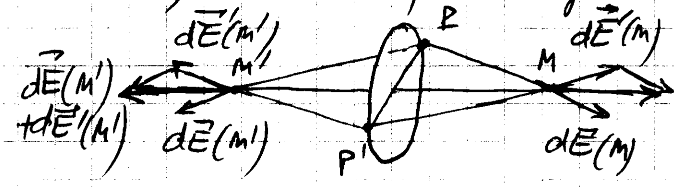
a) • $M \in (Oz)$ → M repéré par sa coord. z

• tous les plans contenant l'axe (Oz) sont des plans de symétrie passant par M

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z}$$

• le plan (Oxy) est un plan de symétrie
$\vec{E}(M) \perp$ à ce plan $\Big\} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(z) = -\vec{E}(-z)}$

Rq : on peut aussi retrouver ce résultat géométriquement en prenant deux pts P, P' sur la spire symétriques par rapport à O pr $\lambda > 0$ par ex :



$$\Rightarrow \vec{E}(z) = -\vec{E}(-z)$$

b) $E(z) = \vec{E}(M)\cdot\vec{u}_z = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{P\in \text{spire}} \lambda(P)\,dl\, \dfrac{\vec{PM}\cdot\vec{u}_z}{\|\vec{PM}\|^3}$ $\quad P(R,\theta) \in$ spire

avec $dl = R\,d\theta$

$\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = -R\vec{u}_r + z\vec{u}_z \rightarrow \|\vec{PM}\|^3 = (R^2+z^2)^{3/2}$

$\vec{PM}\cdot\vec{u}_z = z$

$$\Rightarrow \boxed{E(z) = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}}$$

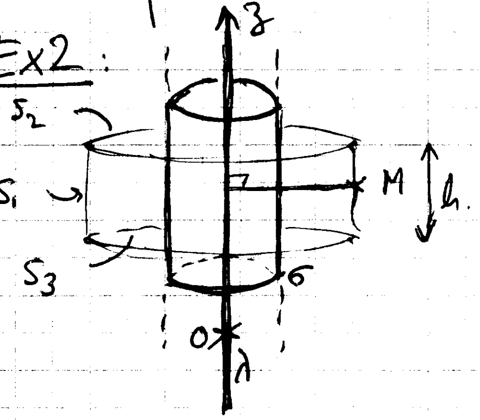
(on a bien $E(z) = -E(-z)$)

en fct de α avec $z>0$:

$$z = R/\tan\alpha \quad \text{et} \quad \|\vec{PM}\| = \frac{R}{\sin\alpha} \Rightarrow \boxed{E(\alpha) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{R}{\tan\alpha}\frac{\sin^3\alpha}{R^3} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha\,\sin^2\alpha}{R}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\vec{E}(M) &= E(\alpha)\,\vec{u}_z \quad \text{pr } z>0\\ &= -E(\alpha)\,\vec{u}_z \quad \text{pr } z<0\end{aligned}}$$

Ex2 :



a) • $M(r,\theta,z)$ car sym. cylindrique

∘ les plans $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_z)$ et $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ sont des plans de symétrie passant par M

$$\rightarrow \vec{E}(M) = E(r,\theta,z)\,\vec{u}_r$$

• la distribution de charges est invariante par rotation autour de (Oz) et par translation parallèlement à (Oz)

$$\rightarrow E(r,\theta,z) = E(r)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u}_r}$$

b) • Appliquons le th de Gauss sur la surface S constituée d'un cylindre S_1 d'axe Oz, de rayon r et de hauteur h fermé par deux disques S_2 et S_3 :

$$\oint_S \vec{E}(M)\cdot\vec{dS} = \iint_{S_1} E(r)\vec{u_r}\cdot dS\vec{u_r} + \underbrace{\iint_{S_2} E(r)\vec{u_r}\cdot dS\vec{u_z}}_{=0} + \underbrace{\iint_{S_3} E(r)\vec{u_r}\cdot(-dS\vec{u_z})}_{=0}$$

$$= E(r)\iint_{S_1} dS = E(r)\,2\pi r h$$

• pour $r<R$: $Q_{int} = \lambda h$

donc th Gauss : $E(r)\,2\pi r h = \dfrac{\lambda h}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{E(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$

• pour $r>R$: $Q_{int} = \lambda h + \sigma 2\pi R h$

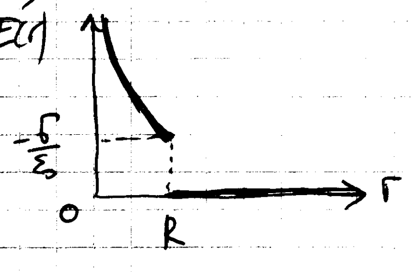
donc th Gauss : $E(r)\,2\pi r h = \dfrac{\lambda h + \sigma 2\pi R h}{\varepsilon_0}$

$\Leftrightarrow \boxed{E(r) = \dfrac{\lambda + 2\pi R\sigma}{2\pi\varepsilon r}}$

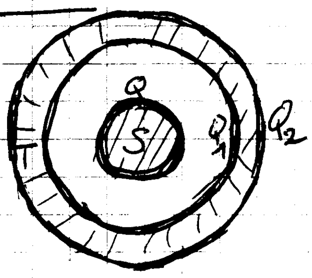
• $E(r)$ est défini partout sauf sur le fil chargé ($r=0$) où $E(r)$ diverge et sauf à la traversée de la surface chargée ($r=R$) où $E(r)$ subit une discontinuité finie bien égale à $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

c) Pr $\lambda>0$ et $\sigma = -\dfrac{\lambda}{2\pi R} < 0$, $E(r) = 0$ pr $r>R$

et $E(R^-) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} > 0$



Ex3



a) • Dans un conducteur, les charges sont à la surface

$\Rightarrow$ $\boxed{Q \text{ sur } S}$ et Q_1 et Q_2 sur surfaces interne et externe de T.

• $Q' = Q_1 + Q_2$ (T isolé électiquemt)

• th de Gauss sur une surface S à l'intérieur de la couche T (une sphère centre O et rayon r tq $R_1<r<R_2$ par ex) :

$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q+Q_1}{\varepsilon_0}$$

or $\vec{E} = \vec{0}$ sur la surface S car $\vec{E} = \vec{0}$ à l'intérieur d'un conducteur

$\Rightarrow \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = 0 \Rightarrow Q + Q_1 = 0$

soit $\boxed{Q_1 = -Q}$ et $\boxed{Q_2 = Q' - Q_1 = Q' + Q}$

b) • M(r, θ, φ) car sym. sphérique

• tout plan contenant (OM) est plan de sym passant par M

$\rightarrow \vec{E}(M) = E(r, \theta, \varphi)\, \vec{u_r}$

• la distr. de charges est invariante par rotation autour de O

$\rightarrow E(r, \theta, \varphi) = E(r)$

$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(r)\, \vec{u_r}$ et $\phi(M) = \phi(r)$

• $\phi_T = \phi(r)$ pr $R_1 \leq r \leq R_2$

$\Rightarrow$ appliquons le th de Gauss sur sphère centre O, rayon $r > R_2$:

$$\oiint_S \vec{E}(M) \cdot \vec{dS} = \oiint_S E(r)\, \vec{u_r}\, dS\, \vec{u_r} = E(r) \oiint_S dS = E(r)\, 4\pi r^2$$

$$Q_{int} = Q + Q_1 + Q_2 = Q_2 = Q' + Q$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q' + Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

or $\vec{E}(A) = -\vec{grad}\, \phi(A) \Leftrightarrow d\phi = -\vec{E}(A) \cdot \vec{dr} = -E(r)\, dr = -\dfrac{Q' + Q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{dr}{r^2}$

$\Rightarrow \phi(r) = \dfrac{Q' + Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$ or $\phi(r) \underset{r \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après le choix de l'origine des ϕ de l'énoncé

$\Rightarrow \phi(r) = \dfrac{Q' + Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ pr $r \geq R_2$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_T = \phi(R_2) = \frac{Q' + Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}}$$

• $\phi_S = \phi(r)$ pr $r \leq R$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_S = \phi(0)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{\text{distr de charges}} \frac{\sigma\, dS}{\|\vec{PO}\|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\iint_S \frac{\sigma\, dS}{R} + \iint_{S_1} \frac{\sigma_1\, dS}{R_1} + \iint_{S_2} \frac{\sigma_2\, dS}{R_2} \right]$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$= \boxed{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q' + Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}}$$

<u>Rq</u>: on aurait aussi pu calculer $\phi_S = \phi(R)$ en calculant $\phi(r)$ pr $R<r<R_1$:

Th de Gauss : $E(r)\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$d\phi = -E(r)\,dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow \phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + c'$$

or $\phi_T = \phi(R_1) \Leftrightarrow \phi_T = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + c' \Leftrightarrow c' = \phi_T - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$

$$= \frac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon_0 R_2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

$$\Rightarrow \phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \quad \text{pr } R<r<R_1$$

$$\Rightarrow \phi_S = \phi(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$